

刚性块体压入颗粒体系时的受力及力链演变

辛海丽, 孙其诚, 刘建国, 金 峰

(清华大学 水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

摘 要: 颗粒体系由大量离散颗粒组成, 普遍存在于自然界中, 比如砂土地基、泥石流及滑坡体等。外荷载通常沿着准直形的路径在体系内传递, 形成区别于单个颗粒和整个体系的细观结构——力链, 亦即颗粒物质具有典型的多尺度特征。采用颗粒离散元方法模拟刚性块体压入颗粒体系的过程, 计算得到了刚性块体底部所受阻力与压入深度的幂率关系; 给出力链的判断准则和搜索强力链程序, 构建颗粒体系强力链网络, 并分析了压入试验过程中力链的演变及其长度的分布规律。

关 键 词: 颗粒物质; 压入试验; 力链; 多尺度

中图分类号: O469; TU 43

文献标识码: A

Evolution of force chains in a granular assembly based on indentation test

XIN Hai-li, SUN Qi-cheng, LIU Jian-guo, JIN Feng

(State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: A granular assembly is a conglomeration of discrete solid and exists in nature widely, such as sand foundations, debris flows and landslides, etc. It is found that external loads generally transmit along the quasi-linear path in the granular assembly, and a special mesoscale structure between a single particle and the entire system, called a force chain, is formed. In other words, granular matter has the typical characteristics of multi-scale. A series of discrete element simulations are conducted on a static granular assembly subjected to indentation by a rigid flat punch. By proposing three conditions for defining a force chain, the evolution of the strong force chain network is presented. The distribution of strong force chain length during the indentation of the punch is also analyzed.

Key words: granular matter; indentation test; force chains; multi-scale

1 引 言

颗粒物质是由大量固体颗粒组成的复杂体系, 如自然界和工程中的砂土地基、泥石流及滑坡体等均为典型的颗粒物质, 通常应用工程力学方法来研究其力学性质。

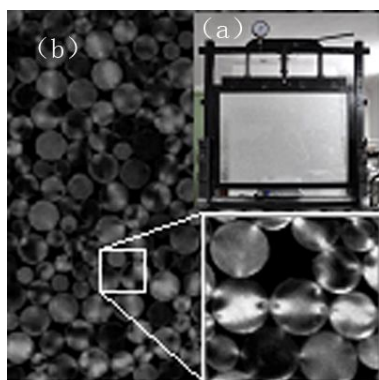
颗粒物质在存在形态上可划分为颗粒气体、颗粒流体和颗粒固体, 它们有本质不同的动量传递机制。其中, 后两者属密集颗粒物质体系, 呈现对外界微小作用的敏感性、非线性响应、自组织行为等复杂力学特性。近 20 年来, 人们逐渐开展了密集颗粒物质的力学性质精细检测和理论分析, 但至今还没有完备的理论可以全面、系统地描述颗粒流体、颗粒固体及两者转变的力学行为, 是当前科学研究

的前沿, 工程力学的概念体系和理论框架不适合颗粒物质机制的研究^[1]。

在密集体系中, 颗粒间接触力一般大于间隙气体或液体力起主导作用, 且沿着链状路径(即力链)这一特殊非线性结构传递, 形成颗粒→力链→体系的多尺度结构, 颗粒固体和颗粒流体的多尺度结构及其演变规律又有很大差异, 决定各自的动力学及两者间的相转变。从分析密集体系结构特征入手, 可以在颗粒固体应力传播模式、破坏机制、颗粒流体流动本构关系等密集体系的关键问题上取得突破, 并能够初步建立起宏观动力学的微观理论, 因此, 具有重要的科学意义^[2]。

1957 年, 在伦敦召开的第 4 届土力学与基础工程国际会议上, Dantu^[3]首次报道了在光弹试验中发

现的颗粒体系内部接触力传递的非均匀现象。之后, Edwards^[4]、Travers^[5]、Liu^[6]、Behringer^[7]、Zhou^[8]等相继采用试验方法观测到颗粒体系内部接触力基本沿着外力方向传递, 形成力链结构, 进而形成力链网络。随着颗粒离散元方法^[9]的出现和计算机性能的不断提 高, 数值模拟颗粒材料已经成为目前颗粒物质研究工作的主流, 比如 Luding 等^[10]建立无摩擦颗粒组成的二维沙堆模型, 考察颗粒堆内部和底部应力的分布; Cates 和 Wittmer 等^[11]通过单剪模拟试验, 发现力链只能承受轴向力, 微小的切向力即可导致力链断裂; Radjai^[12]和 Thornton 等^[13]证明颗粒体系内部 60 % 以上的颗粒所受的力均低于接触力的平均值, 构成弱力链网络, 而接触力大于平均值的颗粒数随着接触力的增加成指数递减趋势。在我国, 蒋红英、苗天德等^[14]对受集中荷载作用的三维颗粒堆中力的传递与分布进行了试验; 徐泳等^[15]采用离散元方法模拟颗粒堆积休止角随颗粒及底板摩擦系数的变化规律; 孙其诚等^[16]阐述了颗粒物质多尺度力学的研究框架, 研究二维静态堆积颗粒中接触力及力链的分布。



(a) 实验装置 (b) 检测到的强力链

图1 清华大学水利系开展的光弹试验

Fig.1 Photoelastic Experiment in Tsinghua University

在工程应用中, 地基与基础是建筑物的根基, 在各类建筑工程事故中, 因地基基础引发的事故占据首位。目前, 采用的地基中应力计算方法, 根据弹性理论推导得来, 基于半无限空间弹性体、连续均匀、各项同性等假定, 如太沙基公式计算地基的极限荷载, 将滑动土体分为 3 区, 可以找到滑动面的形状, 但对土体剪切破坏过程中应力变化过程尚未知晓, 这无疑对土体中颗粒骨架作为主要承力和传力体的论断缺乏支持。基础作用在地基上主要受到土颗粒形成的强力链抵抗, 深入了解颗粒体系内部力链的传力特性, 能够加深对地基的承载性能和破坏过程此类问题的认识。

本文采用离散元方法生成 25 000 个球心共面颗粒组成体系, 颗粒上层放置一刚性块体作为压头。研究颗粒体系在刚性块体压入过程中力链的形成、发展及其演变过程, 提出强力链的判据准则 (颗粒数 $M_c > 2$; 力大小 $F_c > \langle F \rangle$; 角度 $\theta_c = 180 / \langle Z \rangle$)。其中 $\langle F \rangle$ 是平均接触力, $\langle Z \rangle$ 是平均配位数) 来搜索力链, 编制了构建力链网络的高效程序。力链网络是颗粒体系骨架的力学响应, 不仅传达了骨架几何组构信息, 而且能够体现骨架上力的作用。因此, 研究力链形态、特性及动态演变对于获得颗粒物质宏观参数的微观表达, 搭接宏观到微观的多尺度研究起到重要作用。

2 压入试验

图 2 是采用颗粒离散元方法模拟颗粒体系受刚性块体作用的试验布置图。在长度 $B = 0.2 \text{ m}$ 和宽度 $H = 0.1 \text{ m}$ 的矩形框中, 生成 25 000 个无黏性颗粒。

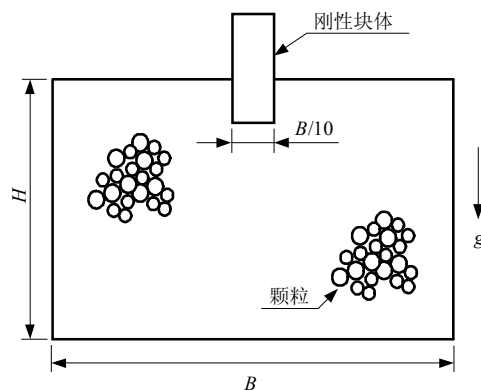


图2 试验布置图

Fig.2 The schematics of numerical experiment setup

颗粒间法向和切向接触力分别采用 Hertz 理论和 Mindlin-Deresiewicz 理论计算。颗粒受重力自由下落, 经过长时间能量耗散后, 体系达到静止状态。颗粒上表面中心放置一个宽为 0.02 m ($B/10$) 的刚性块体, 缓慢压入颗粒体系中, 并不断记录和输出中间结果。研究刚性块体在向下移动过程中颗粒体系中力链的生成、发展和演变, 力链长度的概率密度分布, 以及刚性块底部边界上力的变化。试验材料参数的选取见表 1。

3 力链判据

在颗粒体系的多尺度研究框架中, 通常微观尺度指对单个颗粒的研究, 而把整个颗粒体系作为宏观尺度, 力链则是微观尺度上存在的一种结构形式, 其尺寸大于单个颗粒粒径, 而小于整个颗粒体系,

表 1 计算参数
Table 1 Parameters used in simulation

参数	数值
矩形框 $B \times H / \text{m}^2$	0.2×0.1
条形块宽度 b / m	2×10^{-2}
条形块移动速度 $v / (\text{m/s})$	5×10^{-4}
总压入深度 z / m	5×10^{-2}
时步增量 t / s	3.13×10^{-6}
颗粒总数 N	25 000
颗粒密度 $\rho / (\text{g/cm}^3)$	2.65×10^3
最小粒径 $R_{\max} / \text{m}$	8×10^{-4}
最大粒径 $R_{\min} / \text{m}$	1×10^{-3}
平均粒径 $\langle R \rangle / \text{m}$	9.2×10^{-4}
颗粒间摩擦系数 μ_1	0.3
颗粒与边壁摩擦系数 μ_2	0.3
泊松比 ν	0.3
弹性模量 $E / 10^7 \text{ Pa}$	1.3
重力加速度 $g / (\text{m/s}^2)$	9.8

它不仅与颗粒材料的内禀性能有关（如杨氏弹性模量、泊松比和表面摩擦系数等），而且还受颗粒体系边界条件、初始条件和外荷载的影响，亦即力链的形成受颗粒间作用力影响，同时力链决定宏观颗粒体系的整体力学性质。因此，颗粒物质研究涉及多个物理层次结构和机制，是多尺度力学问题，力链是搭接微观与宏观的桥梁，如图 3 所示的为颗粒物质多尺度框架。浅色线代表接触力 $F > \langle F \rangle$ ，深色线代表 $F \leq \langle F \rangle$ 。

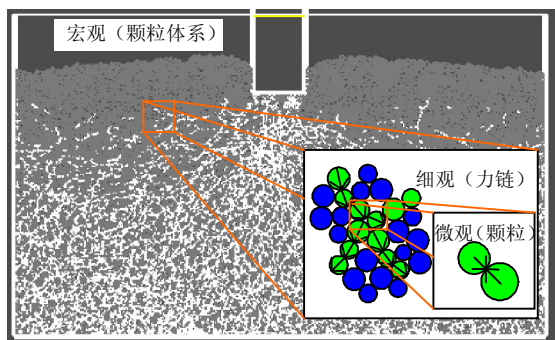


图 3 颗粒物质多尺度结构
Fig.3 Multi-scale structure in granular assembly
Light lines denote contact force $F > \langle F \rangle$,
dark lines denotes $F \leq \langle F \rangle$

对于静态颗粒体系，学者们尝试建立力链网络的理论，比如 Bouchaud 和 Socolar^[17]提出了有取向的力链网络概念，认为力链是若干颗粒组成的线段，每一条线段具有方向和强度，且线段可以连接或断裂。通过类比胶体内微颗粒间的连接结构，固定主轴模型提出力链至少由 3 个接触颗粒按线性排列构

成，其方向与外荷载的最大主应力方向一致，主要支撑轴向荷载，仅能承受很小的转动或切向滑动，Oda^[18]的早期试验工作也证实了这一点。但是至今仍未被广泛认可的力链定义，对力链存在很多不同的理解。尽管大部分学者都认为力链具有准直线性和传递较大力（或应力）的特点，但是如何量化的体现力链的准直性，即颗粒质心连线角度变化阈值 θ_c 多大（ θ_c 见图 4 所示），仍是一个没有解决的难题。基于对力和能量分析，我们认为用力判断强力链接触力阈值 $F_c = \langle F \rangle$ ^[19]。

θ_c 的确定涉及复杂的机制，需考虑接触面的咬合、内嵌等几何结构特点以及自锁平衡等力学行为。显然， θ_c 的数值对力链长度影响比较大，随着 θ_c 的增加，可供寻找的颗粒数目增加，连接成力链的概率增加，特别是长力链的数目和概率会增加。不同的研究者对 θ_c 的取值也不同，具有很大的随意性，如 Peters 等^[20]取 $\theta_c = 45^\circ$ ，而 Pöschel 和 Schwager^[21]取 $\theta_c = 30^\circ$ ，且他们均未对取上述 θ_c 值的理由做进一步说明。在纵多微细观参数中，配位数 Z 是反映颗粒物质体系形态的一个关键值。一般而言，平均配位数 $\langle Z \rangle$ 越大，则颗粒挤压接触越密实，体系强度越大，力链越趋向于保持完成，不易于断裂重组。因此，我们认为， θ_c 的数值应由其配位数 Z 的平均值 $\langle Z \rangle$ 来确定，且满足：

$$\theta_c = \frac{180^\circ}{\langle Z \rangle} \quad (1)$$

式中： $\langle Z \rangle$ 综合反映了颗粒物性（摩擦系数、弹性模量和泊松比等）、级配、颗粒体积分额 ϕ 等几何参数和物性参数对颗粒体系几何结构的影响。

利用 $\langle Z \rangle$ 确定 θ_c 值后，可以寻找系统中存在的各个力链。如果定义 $F > \langle F \rangle$ 的接触力链为强力链，可进一步找出系统中的强力链。如图 4 所示，判断一条强力链的过程如下：设颗粒 A 为起始颗粒，如果颗粒 A、B 间作用力大于接触力平均值，则 A、B 首先连成力链的一段；与颗粒 B 接触的颗粒有 3 个，只有 C 和 D 处于 θ_c 的角度范围之内；若只有 B 和 D 间的力大于平均力，则 D 构成该力链上的第 3 个颗粒；如果在 θ_c 的角度内有多个颗粒大于平均力，则选取角度最小的颗粒；依此类推，可以确定一条完整的力链。具体程序执行过程见图 5。

4 结果分析

4.1 力与位移的关系

图 6 为刚性块体底部所受力 f 与位移 z 的关系

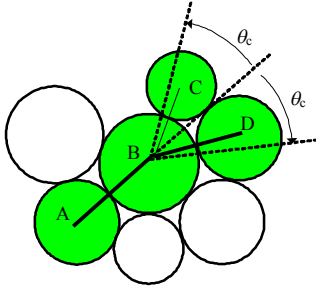


图4 判断力链角度示意图

Fig.4 Judgment of a strong force chain

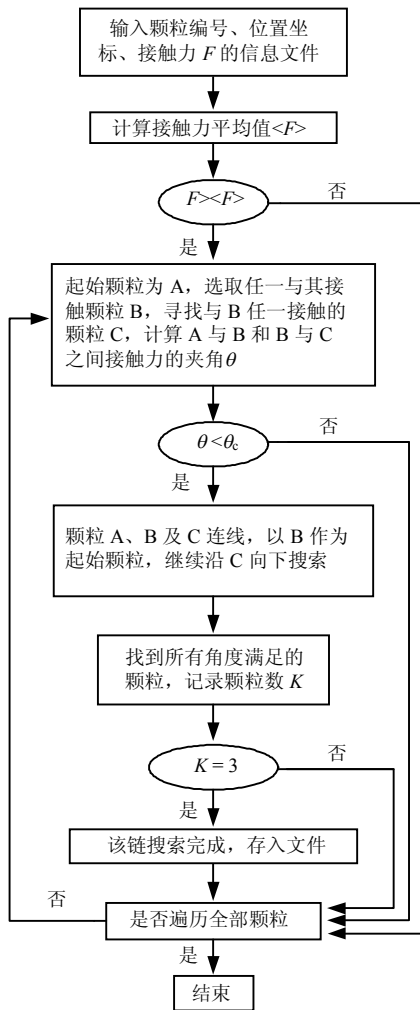


图5 搜索强力链程序流程图

Fig.5 Flow chart for searching strong force chains

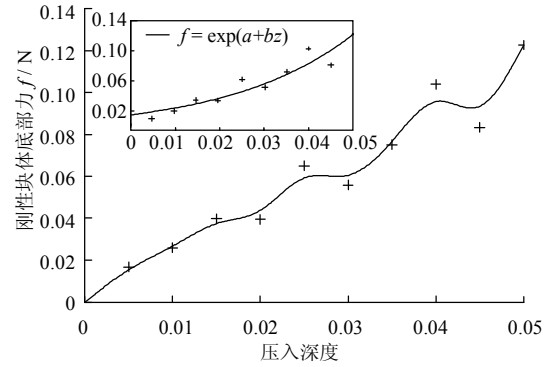
曲线，对曲线进行公式拟合（如图6左上角插图所示），得到：

$$f = \exp(a + bz) \quad (2)$$

式中：系数 $a = -3.92$ ， $b = 0.036$ 。

在浅压入阶段 $z = 0 \sim 0.01$ m，刚性块体底部所受力 f 与位移 z 大致成线性关系。这可以通过流体静力学来解释，浅层颗粒自由活动空间较大，在刚性块体下压过程中，颗粒能够自由地让开；深压入

阶段， $z = 0.01 \sim 0.05$ m， f 与 z 大致成指数形式上升，则是因为随着 z 逐渐增加，刚性块体不仅受到颗粒体系内部竖直方向的压力，还受到水平方向边壁通过力链传递的挤压作用；当刚性块体距离底部边壁较近区域处，刚性块体受到的力将急剧增大，这一区域称为底部影响区域，本试验暂未考虑。

图6 刚性块体底部力 f 与压入深度 z 的关系Fig.6 The relationship between indentation depth z and force f at the bottom of strip footing

4.2 力链网络

图7(a)为试验初始时刻颗粒受重力作用的静止状态接触网络，图7(b)是选取计算中间时刻 $z = 0.025$ m 时，颗粒体系受刚性块体作用颗粒相互挤压形成的接触网络。目前，大多数采用颗粒离散元进行数值模拟的国内外文献报导中均可见此类图形，但接触网络上传递的荷载相差很大，仅是力大小的现象显示，无法进行深层次的分析。基于第3节中提出的力链判断准则，本试验颗粒平均配位数 $\langle Z \rangle = 3.73$ ， $\theta_c \approx 48^\circ$ ，给出 $z = 0.025$ m， $\langle F \rangle = 9.085 \times 10^{-4}$ N，以及 $z = 0.05$ m， $\langle F \rangle = 1.143 \times 10^{-3}$ N 的

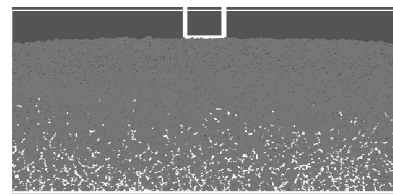
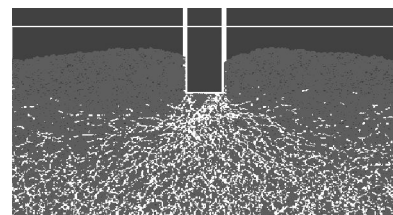
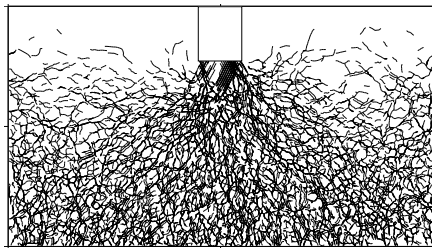
(a) 初始时刻 $z=0$ (b) 中间时刻 $z=0.025$ m， $\langle F \rangle = 9.085 \times 10^{-4}$ N

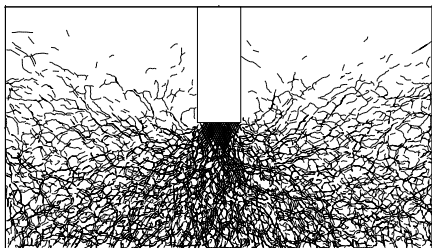
图7 接触网络

Fig.7 The contact connection diagram

强力链网络,如图8(a)、图8(b)所示。由图7(b)和图8(a)对比可知,程序搜索得到的强力链与接触力网络形态基本吻合,使得进一步分析这些强力链的结构特点(比如长度分布、相互间交接情况等),为更深入的颗粒物质特性研究打好基础。



(a) 中间时刻 $z=0.025\text{ m}$, $\langle F \rangle = 9.085 \times 10^{-4}\text{ N}$



(b) 结束时刻 $z=0.050\text{ m}$, $\langle F \rangle = 1.143 \times 10^{-3}\text{ N}$

图8 强力链网络

Fig.8 The strong force chain network

4.3 力链长度的分布

从试验开始至结束,刚性块体压入颗粒体内总深度 $z=0.05\text{ m}$,选取每间隔 $\Delta z=0.005\text{ m}$ 时刻,计算力链长度(每条链上颗粒数目)的概率密度分布函数如图9所示。可以发现,在不同压入深度情况下,力链长度的分布均呈指数递减,与文献[21]得到的结论相吻合,拟合公式采用指数函数:

$$y = \exp(-Ax) \quad (3)$$

式中: $A=0.393$ 。

从图9可以看出,在不同压入深度 z 时,统计得到的强力链长度概率分布几乎不发生变化,统计得到的强力链总数目也基本不变。有两点需要说明:①在颗粒体系单轴压缩模拟中发现,强力链的长度概率分布为更符合幂函数分布,但是没有物理解释;②虽然强力链总数目和分布概率一致,但是力链的方向发生了极大变化,对比图8(a)和图8(b)可以清晰地看出这一点,那么对应的刚性块体底部的受力发生很大变化,比如在 $z=0.05\text{ m}$ 时,与刚性块体底部接触的强力链基本都沿着竖直方向,而在 $z=0.025\text{ m}$ 时,与刚性块体底部接触的强力链基本在 60° 左右的范围内均匀分布,显然前者的强力链释

放在基础底部的力更大,由此可以大致定性地解释图6中 f 随 z 增加的事实。此外,我们同时开展光弹试验检测颗粒物质中的力链结构,正在对力链及力链网络进行定量的分析,有望揭示更深刻的物理内涵。

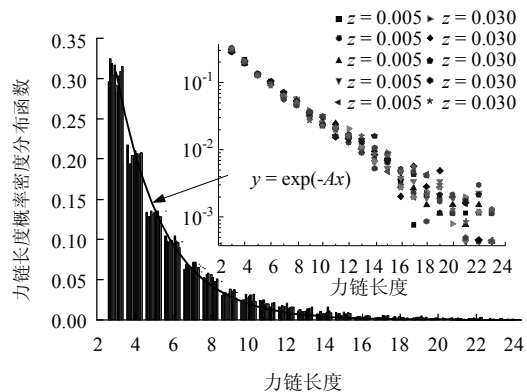


图9 力链长度概率密度分布函数

Fig.9 Probability density distribution function of force chain length

5 结 论

目前,基于连续性介质假设的经典土力学对许多土体内部结构性质无法解释清楚,从微观颗粒角度研究土体的非连续、非均匀和各向异性等特点已逐渐成为颗粒物质研究的主流。本文通过离散数值模拟了颗粒体系受刚性块体作用的压入试验,研究颗粒体系内部细观尺度上力链的力学行为,提出了力链的判据准则,基于颗粒间接触力生成力链网络的方法,初步建立了颗粒物质多尺度研究框架,分析了在外荷载变化下力链长度分布规律等特性,为加深对力链概念的了解、研究颗粒骨架传递应力,建立颗粒物质宏观的微观理论起到一定的促进作用。

总的来说,由于颗粒物质自身复杂的特性导致颗粒物质的研究发展相对缓慢。若想建立完备的颗粒力学体系,必须同时进行物理试验与数值模拟。颗粒物质具有典型的多尺度,研究力链及其网络形态的变化,跨尺度研究必定是推动颗粒物质发展的重要途径^[22]。接下来的研究工作主要包括力链稳定性分析、动态演变规律量化、力链与宏观应力-应变关系的研究等。

参 考 文 献

- [1] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.